Segundo Parcial Miguel Guzman

Pregunta (1)

Sea
$$A := \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Buscamos autovalores autovectores
$$\mathrm{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Y tamb autovectores
$$\mathrm{eigenvecs}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que se tiene que la solucion general del sistema sera

$$X(t) := C_1 \cdot e^{-4t} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{-3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \cdot e^{5t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta (2)

Sea el sistema escrito de forma matricial

$$\frac{d}{dt}X = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Con} \qquad G(t) := \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y $A := \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ Buscamos autovalores autovectores de la matriz

$\mathrm{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\mathrm{eigenvecs}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Solo hay un autovector asociado

Por lo que debemos generar una solucion adicional de la forma $X_S(t) := (U + t \cdot V)e^{3t}$

Donde sabemos que sustituyendo en el sistema homogeneo y dando valores a t=0 y t=1 queda

V es autovector de 3 por lo que $V := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y del sistema $(A - 3I)U = V$

Se despeja U obteniendo

$$U := \begin{pmatrix} -1 + U_2 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

Dando valor $U_2 := 0$

$$U = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que

$$X_S(t) \rightarrow \begin{bmatrix} -e^{3\cdot t}\cdot(2\cdot t + 1) \\ t\cdot e^{3\cdot t} \end{bmatrix}$$

Se tiene entonces que la solucion del sistema homogeneo asociado es

$$X_{Homogeneo} := C_1\cdot e^{3t}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\cdot\begin{bmatrix} -(2t+1) \\ t \end{bmatrix}\cdot e^{3t}$$

Para el sistema No homogeneo entonces se busca la solucion particular

La matriz fundamental sera

$$X_{Fund}(t) := \begin{bmatrix} -2e^{3t} & -(2t+1)\,e^{3t} \\ e^{3t} & t\cdot e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$G(t) \rightarrow \begin{pmatrix} e^{3\cdot t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solucion particular sera:

$$X_p(t) := X_{Fund}(t)\cdot\int X_{Fund}(t)^{-1}\cdot G(t)\,dt \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} t\cdot e^{3\cdot t} + t^2\cdot e^{3\cdot t} + \frac{4}{9} \\ -\frac{t^2\cdot e^{3\cdot t}}{2} - \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

$$U_{prim}(t) := X_{Fund}(t)^{-1}\cdot G(t) \rightarrow \begin{pmatrix} t + e^{-3\cdot t} + 2\cdot t\cdot e^{-3\cdot t} \\ -2\cdot e^{-3\cdot t} - 1 \end{pmatrix}$$

$$U(t) := \int X_{Fund}(t)^{-1}\cdot G(t)\,dt \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} - e^{-3\cdot t}\cdot\left(\frac{2\cdot t}{3} + \frac{5}{9}\right) \\ \frac{2\cdot e^{-3\cdot t}}{3} - t \end{bmatrix}$$

Verificamos que es la solucion particular

$$\frac{d}{dt}X_p(t) - A\cdot X_p(t) - G(t) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Efectivamente es la solucion del No Homogeneo

Pregunta (3) Given

Buscamos la ecuacion auxiliar $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

buscamos raices $\text{Find}(\lambda) \rightarrow (3 \quad 3)$

La unica raiz es 3 que se repite dos veces, por lo que la solucion del sistema homogeneo sera

$$Y_1(x) := e^{3x} \qquad\qquad Y_2(x) := x \cdot e^{3x}$$

Buscamos la solucion particular **(1) Coeficientes indeterminados**

Suponemos la solucion Particular de la forma

$$Y_p(x) := e^x \left(b_0 \cdot \sin(x) + c_0 \cdot \cos(x)\right)$$

Ya que el valor Lambda no es solucion del homogeneo y no hay polinomio

Derivamos

$$\frac{d}{dx} Y_p(x) \text{ simplify } \rightarrow e^x \cdot \left(b_0 \cdot \cos(x) + b_0 \cdot \sin(x) + c_0 \cdot \cos(x) - c_0 \cdot \sin(x)\right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} Y_p(x) \text{ simplify } \rightarrow 2 \cdot e^x \cdot \left(b_0 \cdot \cos(x) - c_0 \cdot \sin(x)\right)$$

Sustituyendo en la ecuacion diferencial y simplificando

$$\frac{d^2}{dx^2} Y_p(x) - 6 \cdot \left(\frac{d}{dx} Y_p(x)\right) + 9\, Y_p(x) \text{ simplify } \rightarrow e^x \cdot \left(3 \cdot b_0 \cdot \sin(x) - 4 \cdot b_0 \cdot \cos(x) + 3 \cdot c_0 \cdot \cos(x) + 4 \cdot c_0 \cdot \sin(x\right.$$

Igualando al termino forzante $G(x) := 25 e^x \cdot \sin(x)$

Se genera el sistema de ecuaciones $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$S := \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad b_0 := 3 \qquad c_0 := 4$$

Por lo que $Y_p(x) \rightarrow e^x \cdot (4 \cdot \cos(x) + 3 \cdot \sin(x))$

verifacamos que si sea la solucion, se tiene

$$\frac{d^2}{dx^2}Y_p(x) - 6\cdot\left(\frac{d}{dx}Y_p(x)\right) + 9\,Y_p(x) \text{ simplify } \rightarrow 25\cdot e^{x}\cdot\sin(x)$$

(2) Variacion de Parametros

Generamos la matriz fundamental con termino forzante

$$X_{Fund}(x) := \begin{pmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) \\ \frac{d}{dx}Y_1(x) & \frac{d}{dx}Y_2(x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{3\cdot x} & x\cdot e^{3\cdot x} \\ 3\cdot e^{3\cdot x} & e^{3\cdot x} + 3\cdot x\cdot e^{3\cdot x} \end{pmatrix} \qquad G(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 25e^{x}\cdot\sin(x) \end{pmatrix}$$

La solucion particular sera:

$$X_p(x) := X_{Fund}(x)\cdot\int X_{Fund}(x)^{-1}\cdot G(x)\,dx \text{ simplify } \rightarrow \begin{bmatrix} e^{x}\cdot(4\cdot\cos(x) + 3\cdot\sin(x)) \\ -e^{x}\cdot(\sin(x) - 7\cdot\cos(x)) \end{bmatrix}$$

$$U_{prim}(x) := X_{Fund}(x)^{-1}\cdot G(x) \rightarrow \begin{pmatrix} -25\cdot x\cdot e^{-2\cdot x}\cdot\sin(x) \\ 25\cdot e^{-2\cdot x}\cdot\sin(x) \end{pmatrix}$$

$$U(x) := \int X_{Fund}(x)^{-1}\cdot G(x)\,dx \rightarrow \begin{bmatrix} e^{-2\cdot x}\cdot(4\cdot\cos(x) + 3\cdot\sin(x) + 5\cdot x\cdot\cos(x) + 10\cdot x\cdot\sin(x)) \\ -5\cdot e^{-2\cdot x}\cdot(\cos(x) + 2\cdot\sin(x)) \end{bmatrix}$$

Recordamos que la solucion particular sera solamente la primera final

$$X_p(x)_0 \rightarrow e^{x}\cdot(4\cdot\cos(x) + 3\cdot\sin(x))$$ Igual solucion obtenida por COInd

$$\frac{d^2}{dx^2}X_p(x)_0 - 6\cdot\left(\frac{d}{dx}X_p(x)_0\right) + 9\,X_p(x)_0 \text{ simplify } \rightarrow 25\cdot e^{x}\cdot\sin(x)$$

Efectivamente es la solucion del No Homogeneo

Pregunta (4)

Se realiza el cambio de variabl $t - 1 = e^{u}$ por lo que $u = \ln(t - 1)$

Sabemos ademas que $\frac{d}{dt}u = e^{-u}$ Cambiando y(x)=S(u) se tiene que y'(x)=S'(u)u'   implica $\frac{d}{dx}y(x) = \frac{d}{dx}S(u)\cdot e^{-u}$ y ahora

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2}S(u) - \frac{d}{dx}S(u)\right)e^{-2u}$$

Sustituyendo el cambio en la ecuacion diferencial se tendra

$$\frac{d^2}{dx^2}S(u) - \frac{d}{dx}S(u) + 8\cdot\frac{d}{dx}S(u) + 12\,S(u) = 0$$

Buscamos la ecuacion auxiliar   Given

$$\lambda^2 + 7\lambda + 12 = 0$$

Buscamos las raices $\text{Find}(\lambda) \rightarrow (-3 \quad -4)$

Por lo que la solucion de la ecuacion lineal sera $S(u) := C_1\cdot e^{-3u} + C_2\cdot e^{-4u}$

Regresando el cambio de variable, la solucion al ejercicio es

$$y(t) := C_1\cdot(t-1)^{-3} + C_2\cdot(t-1)^{-4}$$